

$$I(ア) \quad \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 2\sqrt{3} \text{ である。また,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

である。

$$(イ) \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \frac{1}{5} \text{ である。 } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ と } \tan \theta < 0 \text{ より } 90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ であるから, } \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ である。}$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ である。}$$

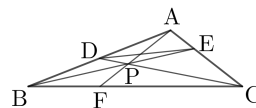
$$(ウ) \quad y = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \text{ より, 頂点は点 } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ である。}$$

C を x 軸方向に $\frac{1}{2}$, y 軸方向に $-\frac{5}{2}$ だけ平行移動移動すると頂点は $(2, -2)$ に移り, さらに x 軸に関して対称移動すると $(2, 2)$ に移る。 x 軸に関する対称移動によって上に凸に変わるので, この放物線をグラフとする関数は

$$y = -2(x-2)^2 + 2 = -2x^2 + 8x - 6$$

である。

$$(エ) \quad \text{余弦定理より } BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ = 49 \text{ であるから, } BC = 7 \text{ である。}$$



$$\text{チェバの定理より } \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \text{ であるから, } \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \text{ である。よって}$$

$$BF = \frac{1}{3} BC = \frac{7}{3} \text{ である。}$$

$$\frac{\Delta ADE}{\Delta ABC} = \frac{AD}{AB} \times \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ であるから, 三角形 ADE の面積は三角形 ABC の面積の } \frac{1}{6} \text{ 倍である。}$$

II(ア) $a = -2$ のとき (*) は $2x+2 = \pm 3$ となり、正の解は $x = \frac{1}{2}$ である。

$a = -2$ のとき (**) は $x^2 - 2x - 5 = 0$ となり、正の解は $x = 1 + \sqrt{6}$ である。

(イ) (*) は $2x - a = \pm 3$ より解は $x = \frac{a \pm 3}{2}$ である。よって、異なる 2 つの正の解をもつのは $\frac{a-3}{2} > 0$ のとき

であるから、 $a > 3$ である。

(**) の左辺を $f(x)$ とおくと、 $f(x) = x^2 - 2x + 2a - 1 = (x-1)^2 + 2a - 2$ である。(**) が異なる 2 つの正の解をもつのは $y = f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と 2 点を共有するときである。そのための条件は

$$f(0) = 2a - 1 > 0 \text{ かつ } f(1) = 2a - 2 < 0$$

であるから、 $\frac{1}{2} < a < 1$ である。

(ウ) (*) と (**) が共通解をもつとき、共通解 x に対して

$$|2x - a| = 3 \text{ かつ } a = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1)$$

が成り立つ。 a を消去すると $|x^2 + 2x - 1| = 6$ となり、

$$x^2 + 2x - 1 = 6 \dots \textcircled{1} \text{ または } x^2 + 2x - 1 = -6 \dots \textcircled{2}$$

である。①のとき $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$ であり、②を満たす実数 x は存在しない。

よって正の共通解は $x = -1 + 2\sqrt{2}$ であり、このとき $a = -5 + 4\sqrt{2}$ である。

Ⅲ(ア) 袋 A から取り出した玉が 2 個とも赤玉である確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

である。

取り出した 4 個の玉が白玉と赤玉 2 個ずつになるのを、袋 A から取り出した赤玉が 0 個、1 個、2 個の場合に分けて考えると、求める確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_5C_2} + \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{23}{50}$$

である。

4 個のうち少なくとも 1 個が白玉であるのは、4 個とも赤玉である事象の余事象であるから、その確率は

$$1 - \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{97}{100}$$

である。

(イ) 袋 A に白玉が 2 個と赤玉が 3 個入っているのは、袋 A と袋 B から同じ色の玉を取り出すときである。

袋 A と袋 B から白玉を取り出す確率は $\frac{2}{5} \times \frac{4}{6}$ 、袋 A と袋 B から赤玉を取り出す確率は $\frac{3}{5} \times \frac{3}{6}$ であるから、

袋 A に白玉が 2 個と赤玉が 3 個入っている確率は

$$\frac{8}{30} + \frac{9}{30} = \frac{17}{30}$$

であり、このとき袋 A から取り出した玉が赤玉である条件付き確率は

$$\frac{9}{30} \div \frac{17}{30} = \frac{9}{17}$$

である。